**Disciplina(s)/código atendida(s):**
**Lista 3**

| | |
|---|---|
| Data da lista | 24 e 27 de Junho de 2024 |
| Preceptor(a) | Felipe Yamamoto Tenedine |
| Curso(s) atendido(s) | Estatística |
| Orientador(a) | Walkiria M. de O. Macerau |

# Exercício

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho $n$ da distribuição da variável aleatória $X$ com f.d.p. dada por

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad \text{com } x > \theta \text{ e } \theta > 0.$$

(a) Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de $X$.

(b) Verifique se $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ e $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$ são estimadores não viesados para $\theta$.

(c) Encontre e compare os EQMs dos dois estimadores.

# Resolução

(a) Especifique o espaço paramétrico e o suporte associado à distribuição de $X$.

O espaço paramétrico é dado por:

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta > 0\}$$

O suporte da distribuição é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \theta\}$$

(b) Verifique se $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ e $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$ são estimadores não viesados para $\theta$.

**Estimador $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$:**

A esperança de $\bar{X}$ é:

$$E[\bar{X}] = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = E[X_i]$$

Para uma variável $X_i$ com a dada f.d.p., temos:

$$E[X_i] = \int_{\theta}^{\infty} x e^{-(x-\theta)}\, dx$$

Fazendo a substituição $u = x - \theta$:

$$E[X_i] = \int_0^{\infty} (u+\theta) e^{-u}\, du = \int_0^{\infty} u e^{-u}\, du + \theta \int_0^{\infty} e^{-u}\, du$$

$$E[X_i] = 1 + \theta$$

Portanto, $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ é viesado.

**Estimador $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$:**
Para encontrar $E[X_{(1)}]$, precisamos encontrar a f.d.p. de $X_{(1)}$:
Note que a função de distribuição acumulada (f.d.a.) de $X$ é:

$$F_X(x) = \int_{\theta}^{x} e^{-(u-\theta)}\, du = 1 - e^{-(x-\theta)}$$

Portanto, podemos escrever $F_X(x)$ da seguinte forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \theta \\ 1 - e^{-(x-\theta)}, & \text{se } x \geq \theta \end{cases}$$

Observe que encontramos $F_X(x)$, mas queremos $F_{X_{(1)}}(x)$. Então:

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leq x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq x)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)\dots P(X_n > x)$$

Como $X_i$ são i.i.d., temos:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [P(X > x)]^n = 1 - [1 - F_X(x)]^n$$

Substituindo $F_X(x)$:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - (1 - e^{-(x-\theta)})]^n = 1 - [e^{-(x-\theta)}]^n = 1 - e^{-n(x-\theta)}$$

Agora, derivando para encontrar a f.d.p. de $X_{(1)}$:

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-n(x-\theta)}\right) = ne^{-n(x-\theta)}$$

Portanto, a f.d.p. de $X_{(1)}$ é:

$$f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} ne^{-n(x-\theta)}, & \text{se } x \geq \theta \\ 0, & \text{se } x < \theta \end{cases}$$

Para encontrar a esperança de $X_{(1)}$:

$$E[X_{(1)}] = \int_{\theta}^{\infty} x f_{X_{(1)}}(x;\theta)\, dx = n \int_{\theta}^{\infty} x e^{-n(x-\theta)}\, dx$$

Fazendo a substituição $u = n(x-\theta)$, temos $du = n\, dx$ e $dx = \frac{du}{n}$:

$$E[X_{(1)}] = n \int_{0}^{\infty} \left(\frac{u}{n} + \theta\right) e^{-u} \frac{du}{n} = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{u}{n} + \theta\right) e^{-u}\, du$$

$$E[X_{(1)}] = \frac{1}{n} \int_{0}^{\infty} u e^{-u}\, du + \theta \int_{0}^{\infty} e^{-u}\, du$$

Sabemos que $\int_0^\infty u e^{-u}\, du = 1$ e $\int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$:

$$E[X_{(1)}] = \frac{1}{n} \cdot 1 + \theta \cdot 1 = \theta + \frac{1}{n}$$

$$E[X_{(1)}] = \theta + \frac{1}{n}$$

Portanto, $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$ é um estimador viesado para $\theta$, porém é assintoticamente não viesado.

(c) Encontre e compare os EQMs dos dois estimadores.

**Estimador $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$:**

Para calcular a variância de $X$, primeiro precisamos encontrar $E[X^2]$.

Sabemos que:

$$E[X] = \theta + 1$$

Para calcular $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{-(x-\theta)}\, dx$$

Fazendo a substituição $u = x - \theta$, temos:

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} (u+\theta)^2 e^{-u}\, du = \int_0^{\infty} (u^2 + 2u\theta + \theta^2) e^{-u}\, du$$

Separando os termos:

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} u^2 e^{-u}\, du + 2\theta \int_0^{\infty} u e^{-u}\, du + \theta^2 \int_0^{\infty} e^{-u}\, du$$

Usando os resultados conhecidos:

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-u}\, du = 2, \quad \int_0^{\infty} u e^{-u}\, du = 1, \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} e^{-u}\, du = 1$$

Portanto:

$$E[X^2] = 2 + 2\theta \cdot 1 + \theta^2 \cdot 1 = 2 + 2\theta + \theta^2$$

Agora podemos calcular a variância de $X$:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 + 2\theta + \theta^2 - (\theta+1)^2$$

$$\text{Var}(X) = 2 + 2\theta + \theta^2 - (\theta^2 + 2\theta + 1) = 2 + 2\theta + \theta^2 - \theta^2 - 2\theta - 1 = 1$$

Portanto, a variância de $X$ é $\text{Var}(X) = 1$.

A variância de $\bar{X}$ é:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\text{Var}(X)}{n} = \frac{1}{n}$$

O viés do estimador $\hat{\theta}_1$ é:

$$\text{Viés}(\hat{\theta}_1) = E[\hat{\theta}_1] - \theta = E[\bar{X}] - \theta = (\theta+1) - \theta = 1$$

O EQM do estimador $\hat{\theta}_1$ é:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \text{Var}(\hat{\theta}_1) + \text{Viés}^2(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n} + 1^2 = \frac{1}{n} + 1 = \frac{1+n}{n}$$

**Estimador $\hat{\theta}_2 = X_{(1)}$:**

Para calcular a variância de $X_{(1)}$, precisamos encontrar $E[X_{(1)}^2]$.

A f.d.p. de $X_{(1)}$ é:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n e^{-n(x-\theta)}$$

Para calcular $E[X_{(1)}^2]$:

$$E[X_{(1)}^2] = \int_{\theta}^{\infty} x^2 f_{X_{(1)}}(x;\theta)\, dx = n \int_{\theta}^{\infty} x^2 e^{-n(x-\theta)}\, dx$$

Fazendo a substituição $u = n(x-\theta)$, temos $du = n\, dx$ e $dx = \frac{du}{n}$:

$$E[X_{(1)}^2] = n \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{n} + \theta\right)^2 e^{-u} \frac{du}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} (u + n\theta)^2 e^{-u}\, du$$

Expandindo e separando os termos:

$$E[X_{(1)}^2] = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} (u^2 + 2un\theta + n^2\theta^2) e^{-u}\, du$$

Usando os resultados conhecidos:

$$E[X_{(1)}^2] = \frac{1}{n}\left(\int_0^\infty u^2 e^{-u}\,du + 2n\theta\int_0^\infty ue^{-u}\,du + n^2\theta^2\int_0^\infty e^{-u}\,du\right)$$

$$E[X_{(1)}^2] = \frac{1}{n}\left(2 + 2n\theta + n^2\theta^2\right)$$

$$E[X_{(1)}^2] = \frac{1}{n}\cdot 2 + \frac{2n\theta}{n} + \frac{n^2\theta^2}{n} = \frac{2}{n} + 2\theta + n\theta^2$$

Agora podemos calcular a variância de $X_{(1)}$:

$$\text{Var}(X_{(1)}) = E[X_{(1)}^2] - (E[X_{(1)}])^2 = \frac{2}{n} + 2\theta + n\theta^2 - \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2$$

Expandindo $(E[X_{(1)}])^2$:

$$(E[X_{(1)}])^2 = \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2 = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Portanto:

$$\text{Var}(X_{(1)}) = \frac{2}{n} + 2\theta + n\theta^2 - \left(\theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Var}(X_{(1)}) = \frac{2}{n} + 2\theta + n\theta^2 - \theta^2 - \frac{2\theta}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Simplificando:

$$\text{Var}(X_{(1)}) = n\theta^2 - \theta^2 + 2\theta - \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = (n-1)\theta^2 + \theta\left(2 - \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Var}(X_{(1)}) = \frac{1}{n^2}$$

O viés do estimador $\hat{\theta}_2$ é:

$$\text{Viés}(\hat{\theta}_2) = E[\hat{\theta}_2] - \theta = E[X_{(1)}] - \theta = \left(\theta + \frac{1}{n}\right) - \theta = \frac{1}{n}$$

O EQM do estimador $\hat{\theta}_2$ é:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \text{Var}(\hat{\theta}_2) + \text{Viés}^2(\hat{\theta}_2) = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}$$

Comparando os EQMs:

$$\text{EQM}(\hat{\theta}_1) = \frac{1+n}{n}, \quad \text{EQM}(\hat{\theta}_2) = \frac{2}{n^2}$$

Como $\frac{2}{n^2} < \frac{1+n}{n}$ para $n > 1$, $\hat{\theta}_2$ é um estimador mais eficiente do que $\hat{\theta}_1$.